A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT 3r., sem. letni
LISTA 12,5

Wrocław, 10 maja 2013

Ta lista dotyczy Twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonału na $C([0,1])$ (z normą supremum). Do jej rozwiązania wystarczy znać sformułowanie twierdzenia:

Twierdzenie Riesza. Przestrzeń $C([0,1])^*$ jest izometrtycznie izomorficzna z przestrzenią $\mathcal{M}([0,1])$ wszystkich borelowskich ograniczonych miar zespolonych na $[0,1]$. Funkcjonały nieujemne odpowiadają miarom nieujemnym. Izomorfizm zadany jest wzorem $\mathcal{M}([0,1]) \ni \mu \mapsto P_\mu \in C([0,1])^*$, gdzie

$$P_\mu(f) = \int f\, d\mu.$$

Norma funkcjonału nieujemnego P_μ stowarzyszonego z miarą nieujemną μ wynosi $\|P\| = \mu([0,1])$ (dla miar znakowanych patrz zadanie 1, dla miar zespolonych potrzebne jest pojęcie wahania miary, które jest poza programem).

ZADANIE 1. Udowodnij, że dla funkcjonału P zadanego przez miarę rzeczywistą znakowaną μ zachodzi równość $\|P\| = |\mu|([0,1])$), gdzie $|\mu|$ jest zdefiniowana jako suma $\mu^+ + \mu^-$ (gdzie $\mu = \mu^+ - \mu^-$ jest rozkładem miary μ na różnicę miar nieujemnych).

ZADANIE 2.
(a) Na $C([0,1])$ rozważmy funkcjonał

$$P(f) = \int_0^1 f(x^2)\, dx$$

Sprawdź, że jest to funkcjonał liniowy i ograniczony. Skoro tak, to na mocy twierdzenia Riesza istnieje miara μ na $[0,1]$, taka że $P(f) = \int f\, d\mu$. Jaka to miara?
(b) Ogólniej, niech $g : [0,1] \to [0,1]$ będzie ciągła i różniczkowalna w każdym punkcie. Jaka miara reprezentuje funkcjonał $P_g(f) = \int_0^1 f(g(x))\, dx$?
Uwaga na funkcje g nieróżnowartościowe! Uwaga na miejsca gdzie pochodna z g się zeruje!

ZADANIE 3. Dany jest funkcjonał P na $C([0,1])$. Rozważmy następujący ciąg liczbowy $(a_n)_{n\geq 0}$

$$a_n = \begin{cases} P(\cos(n\pi x)) & n - \text{parzyste} \\ P(\sin((n+1)\pi x)) & n - \text{nieparzyste} \end{cases}$$

(a) Udowodnij, że jeśli $(a_n) \in \ell^2$, to miara reprezentująca P jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a.

(b) Udowodnij, że $a_0 = 1$ i $a_n = 0$ dla $n > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy miara reprezentująca P jest miarą Lebesgue'a (oczywiście trudna część zadania to pokazanie ,,tylko wtedy").
(c) Jak wygląda ciąg (a_n) gdy miara reprezentująca P jest miarą skupioną w punkcie 0? A w punkcie 1?
(d) Dla jakich miar ciąg ten składa się z samych zer i jednej jedynki?

ZADANIE 4. Udowodnij, że jeśli μ jest miarą zespoloną absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a λ, to $\|P_\mu\| = \|g\|_1$, gdzie g jest gęstością Radona-Nikodyma miary μ a $\|\cdot\|_1$ oznacza normę w $L^1(\lambda)$.

ZADANIE 5. Czy funkcjonały pochodzące od miar absolutnie ciągłych tworzą zbiór domknięty w $C([0,1])^*$?

ZADANIE 6. Czy funkcjonały pochodzące od miar czysto atomowych tworzą zbiór domknięty w $C([0,1])^*$?
Wskazówka: Niech μ będzie miarą atomową (na przykład o jednym atomie). Sprawdź, że dostatecznie bliskie mierze μ miary muszą też mieć atom w tym samym punkcie co μ.

Tomasz Downarowicz